UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Matemática e Estatística
Laboratório de Ensino de Matemática (LEM)

Revisão Ago. 2025 / desde 1998

MAC 118 - IME - Versão 8.2/98
Leônidas de Oliveira Brandão (LEM/LInE)
Patrícia Paladino

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

Algumas vezes, observamos um "padrão" repetitivo em determinado processo dependente dos números naturais (ou indexados por estes), então surge a questão este padrão de fato é válido sempre? Se o padrão valer sempre provavelmente poderemos apresentar uma prova baseada no princípio da indução finita. Nesta apostila do LEM apresentamos este conceito, de modo que um professor de matemática pode utilizar este texto para incentivar seus alunos a experimentarem, procurarem estabelecer conjecturas e depois tentar prová-las.

Objetivos dessa apostila

Esta apostila é dirigida principalmente a estudantes do ciclo médio (segundo grau). Nela, não só introduziremos o importante conceito de indução, mas o faremos de forma a incentivar o leitor a fazer testes e elaborar conjecturas. Propomos que estes testes sejam realizados em programas computacionais como o **Octave**[1] ou **SciLab**[2].
Desta forma esperamos que o leitor entenda a necessidade do **princípio de indução matemática** e ainda se sinta motivado a pesquisar propriedades matemáticas através da utilização dos referidos programas.

Introdução

A idéia básica do processo de indução está baseada na "construção" dos números naturais:

- seja 0 (ou 1) o primeiro natural — fará o papel da *base da indução*
- se n é um natural, então n+1 é natural — fará o papel do *passo da indução*

Apesar de aparentemente simples, este conceito é muito poderoso e bastante sofisticado, não sendo de fácil assimilação. Sua principal dificuldade reside no passo da indução, que mistura os conceitos de tese, hipótese e demonstração.

Para que usar indução?

Vamos observar o resultado gerado pelo trinômio $n^2 - n + 17$, quando aplicamos a alguns números naturais n, como por exemplo, até 10. Utilizando o **Octave** ou o **Scilab** (ou papel, lápis e muita paciência), podemos verificar que todos os números gerados são **primos** !!!

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
f(n)	17	17	19	23	29	37	47	59	73	89	107

Assim, aparentemente, levados por essas observações, poderíamos conjecturar que $\mathbf{n^2 - n + 17}$ é primo para todo número natural.
No entanto, verificando para n=17, obteremos como resposta, 289=17x17, portanto um número composto.
Se concluíssemos que o resultado é sempre um número primo, nossa conclusão seria falsa.
Apesar do "padrão" ser observado para várias amostras, acabamos encontrando uma instância (ou exemplo) onde o mesmo não é válido, isto é denominado **contra-exemplo.**
Então n=17 é um contra-exemplo à conjectura[3], o próximo número a "estragar" nossa conjectura é o 18, pois 18^2 -

[1] O **GNU Octave** (**Scientific Programming Language**) é um sistema de código aberto (*livre*) iniciado em 1988 para simplificar o processamento numérico: https://octave.org.
[2] O **Scilab** é outro sistema livre, este iniciado nos anos 80. URL: https://www.scilab.org/about/scilab-open-source-software.
[3] Descubra outros casos em que o resultado não é um número primo. Utilize o computador para esta tarefa.

$18^2 + 17 = 323 = 17 \times 19$.

Mas, e se a conjectura estivesse correta? Por mais números que examinássemos seria impossível encontrar um contra-exemplo!!! Como demonstrá-la (e nesse caso deixaria de ser uma conjectura para ser um teorema)? A resposta pode ser: **processo de indução.**
Para examinarmos esse caso "mais complicado", vamos utilizar uma conjectura sabidamente verdadeira: a soma dos termos de uma progressão aritmética de razão 1, para todo **n** natural:

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n\,(n+1)}{2} \qquad (*)$$

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1+2+⋯+n	0	1	3	6	10	15	21	28	36
$\frac{n(n+1)}{2}$	0	1	3	6	10	15	21	28	36

E por maior que seja n verificamos a validade da conjectura (*****), mas o fato de valer para os exemplos testados, não implica que vale sempre e por isso precisamos de um processo formal para demonstrar que a conjectura é de fato um teorema. Vamos examinar a técnica de demonstração por indução.

Estrutura Geral de uma Prova por Indução

Dado $n_o \in \mathbb{N}$ suponhamos que a cada natural $n \geq n_o$ esteja associada uma afirmação T(n). Então T(n) será verdadeira para $n \geq n_o$ desde que seja possível provar os seguintes resultados:

Condição 1 *(base): $T(n_o)$ é verdadeira (por exemplo para $n_o = 1$)*

Condição 2 *(passo): Sempre que T(n) é verdadeira para* ***todo*** *$n \geq n_o$ (hipótese de indução)
teremos T(n+1) também verdadeira (tese de indução)*

Princípio da Indução: *Se as condições* ***1*** *e* ***2*** *acima valerem, então T(n) é válido para todo natural $n \geq n_o$.*

Demonstração Suponhamos o contrário: que a proposição não é válida para algum natural. Então existe um primeiro natural *m* onde *T(m)* não vale, ou seja:
- *T(m)* não é válida; e
- *T(n)* é válida para todo *n<m*.

Portanto a proposição é válida para o número *m-1* e não o é para o número seguinte, *m*. Mas, isso contradiz a condição *2* que afirma que *T(m-1)* valer implica *T((m-1)+1)=T(m)* também é válido!
Logo não pode existir um tal $m \in \mathbb{N}$ e assim *T(n)* é válido para todo $n \geq n_o$. ■

Toda demonstração que se baseia no princípio de indução matemática pode ser denominada *demonstração por indução* (ou pelo *método de indução matemática*). Esquematicamente, tal demonstração consta necessariamente de duas partes a serem demonstradas, mais especificamente, em uma demonstração por indução deve-se provar a base e o passo da indução:

Parte 1 (Base): *A proposição é válida para n = 1.*
Parte 2 (Passo): *Se a proposição é válida para qualquer $n \geq n_o$, então ela é válida para n+1.*

Se *ambas* as partes forem demonstradas, pode-se afirmar, em virtude do princípio de indução matemática, que a proposição é válida para todo número natural *n.*

Vamos aplicar esta teoria ao exemplo (*****), a P.A. de razão 1:

$$T(n) = \left\{1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\right\} \text{ para todo } n \geq 1 \qquad (*)$$

Base: Vamos demonstrar a base de indução: a tese T(1) é válida.

De fato T(1) vale, pois $1+2+\cdots+n = 1$ e quando $n=1$, $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$.

Passo: Vamos agora demonstrar a validade do passo da indução. Por hipótese, vamos supor que T(n) é válido para $n \geq 1$ (da parte anterior, ao menos, para n = 1, T(n) vale).

Vamos provar que a fórmula vale para T(n+1), ou seja, $\{(n+1)(n+2)/2 = 1+2+...+ n + (n+1)\}$.

Por hipótese de indução $1 + 2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, então

$$\mathbf{1 + 2 + ...+ n} + (n+1) = \mathbf{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Portanto, da base e passo da indução acima, segue que a conjectura (*) é verdadeira, ou seja,

$$T(n) = \left\{1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}\right\}, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \qquad \blacksquare$$

Observação: É necessário destacar que a demonstração por indução exige incondicionalmente a demonstração de *ambas as partes* 1 e 2.

Para que se possa dominar o método de indução matemática é recomendável examinar um número "considerável" de problemas. Neste sentido, apresentaremos a seguir algumas atividades e alguns exemplos. Sugerimos que as atividades sejam desenvolvidas utilizando algum "software" matemático (como o Octave). **Faça seus testes.**

Atividade 1

Consideremos o trinômio $x^2 + x + 41$, estudado por *Leonhard Euler*[3]*:* usando zero como valor para x, obtemos o número *primo* 41. Se usarmos o número 1 para x, obtemos de novo um número *primo*, o 43. Substituindo *x* no trinômio sucessivamente por 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, obtemos em *cada substituição um número primo* (47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131 e 151, respectivamente). Se substituirmos *x* no trinômio por um número inteiro não negativo *qualquer, sempre* obtemos um número *primo* como resultado? O que podemos inferir?
Tente encontrar algum contra-exemplo, preferivelmente utilizando o computador .

Resposta: Analisando o trinômio $x^2 + x + 41$, para x entre 0 e 40, perceberemos que: resulta em número primo para x = 0,1,2,..., 39, mas para x = 40 seu valor é $40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40 + 1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot (40 + 1) = 41^2 = 1681$. Portanto, n=40 é um contra-exemplo à conjectura.

Exemplo de simulação no Octave*: solução para a atividade 1 para a conjectura de x^2+x+41 ser primo.*

```
disp("Imprima apenas os valores n^2+n+41 que sao primos, n entre 0 e 10");
ini = 1; fim = 60; # n=40 e' o primeiro natural que falha a conjectura!
for n = ini:fim
  m = n*n + n + 41;
  if (isprime(m))
    fprintf("%2d : %5d : e' numero primo\n", n, m);
  else
```

[3] Leonhard Euler (1707-1783) importante matemático suíço, nascido em Basiléia, morou longos anos na Rússia, onde faleceu, considerado um dos fundadores da Ciência Moderna, suas contribuições à teoria dos números são numerosas. As mais importantes estão contidas em *Anleitung Vollstandige zur Algebra* (Guia Completo de Álgebra) de 1771 originalmente um livro texto em dois volumes, para as escolas da Rússia.

```
    fprintf("%2d : %5d : OPS, falhou, NAO e' numero primo\n", n, m);
    endif
  endfor;
```

Atividade 2

Consideremos os números do tipo $2^{2^n} + 1$. Para $n = 0, 1, 2, 3$ e 4, os números $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$ e $2^{2^4} + 1 = 65537$ são primos.

Pierre de Fermat[4], ilustre matemático francês do século XVII, conjecturou que *todos* os números desse tipo eram primos. Entretanto, *Leonhard Euler* concluiu, já no século XVIII, que

$$2^{32} + 1 = 4294967297 = 641 \times 6700417$$

é um número composto, destruindo a conjectura de Fermat. Lembre que nesta época isso era feito *manualmente*!

Utilizando o computador (ou alguma calculadora que consiga computar 2^{32}) para verificar a conclusão de Euler.

Atividade 3

O produto $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ indica-se com **n!** (lê-se: n fatorial ou fatorial de n).
Calcular $S_n = 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n!$
Sugerimos testar esta série para n= 1,2,3,4 ... e tente estabelecer alguma fórmula mais simples para descrever a série. Use o Octave ou SciLab nesta tarefa. Pare a leitura aqui e só retorne após ter alguma resposta.

Deve ter notado que: $S_n = (n+1)! - 1$. Agora você deverá demonstrar indutivamente este resultado (faça sem conferir a resposta apresentada abaixo).

Provar por Indução: (Base) Para n=1 a hipótese é válida pois, $S_1 = 1 \times 1! = 2! - 1$. (Passo) Suponhamos que $S_n = 1 \times 1! + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \ldots + n \times n! = (n+1)! - 1$. Então devemos provar que $S_{n+1} = (n+2)!-1$.
Assim $S_{n+1} = 1 \times 1! + 2 \times 2! + \ldots + n \times n! + (n+1) \times (n+1)! = (n+1)!-1 + (n+1) \times (n+1)! = (n+2)!-1$. ■

Exemplo 1 Calcular a soma $S_n = \frac{1}{1x2} + \frac{1}{2x3} + \frac{1}{3x4} + \ldots \frac{1}{nx(n+1)}$. Pela definição, $S_1=1/(1x2)$.
Tente estimar o valor de S_n efetuando alguns cálculos, por exemplo, até n=4. Existe alguma equação simples que descreve esta soma? (Só continue após ter elaborado alguma conjectura, ou cansado...).

Com a ajuda do Octave ou SciLab, podemos verificar que $S_n = \frac{n}{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Mesmo que não tenha conseguido chegar a esta conjectura, testa-a.

Após convencer-se que esta é uma conjectura razoável, tente demonstrá-la por indução e só então prossiga.

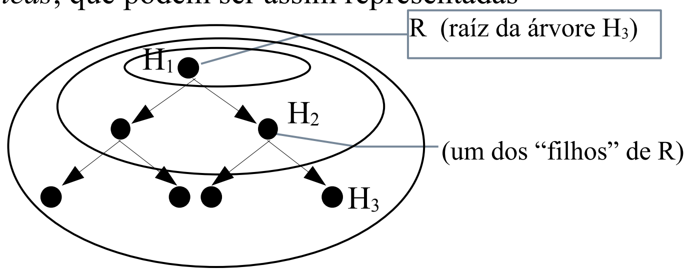
Demonstração por indução: (Base) Para $n = 1$ a hipótese se verifica, pois $S_1 = \frac{1}{1x2} = \frac{1}{2}$.

(Passo) Vamos admitir como hipótese, de indução que $S_n = \frac{n}{n+1}$, para algum $n \geq 1$.
Demonstremos que também vale $S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$. Para isto re-escreveremos a última equação e aplicaremos a hipótese de indução. Da definição de Sn+1, temos que $S_{n+1} = S_n + 1/((n+1)(n+2))$, portanto

[4] Pierre de Fermat (1601-1665) importante matemático francês.

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$ ■

Exemplo 2 Neste exemplo é necessário descrever uma estrutura de **árvore binária**, muito útil para representar relações de precedência binárias (onde os elementos têm no máximo dois "pré-requisitos"). Um exemplo deste tipo de relação são as *árvores genealógicas*, que podem ser assim representadas



Exemplo de árvore binária com três níveis

As árvores representadas acima formam um *sub-conjunto* das árvores binárias, pois têm uma característica muito especial: todos os nós com descendentes, têm exatamente dois "filhos". Este tipo de árvore recebe o nome de **árvore completa**. Antes de prosseguir, tente descobrir quantos nós tem a árvore H_n, $n \in \mathbb{N}$.

Agora você deve provar que (de fato) o número de nós na árvore binária H_n é, $\mathbf{2^n-1}$, para todo $n \geq 1$.
Demonstração: Por indução no nível n de H_n (se $S=\{n \in \mathbb{N} : \#H_n=2^n-1\}$[5] desejamos provar que $S=\mathbb{N}$).

Base: Direto, pois $\#H_1=1$ e $2^1-1=1$, logo a base da indução vale.

Passo: Vamos admitir como hipótese de indução que $\#H_n=2^n-1$, para algum $n \geq 1$. Agora devemos provar que $\#H_{n+1}=2^{n+1}-1$.
Da definição de H_n, segue que $\#H_{n+1} = 1+2 \times \#H_n$, portanto da hipótese de indução
$\#H_{n+1} = 1+2 \times (2^n-1) = 1 + 2^{n+1}-2 = 2^{n+1}-1$, como desejávamos demonstrar. ■

Exemplo 3 *G. W. Leibniz*[6], eminente matemático alemão do século XVII, demonstrou que, qualquer que seja o inteiro positivo *n,* o número $n^3 - n$ é divisível por 3, o número $n^5 - n$ é divisível por 5 e o número $n^7 - n$ é divisível por 7. Daí supôs que, para todo *k* ímpar e qualquer *n* natural, o número $n^k - n$ é divisível por *k,* mas logo observou que $2^9 - 2 = 510$ não é divisível por 9.

Exemplo 4 Um erro da mesma natureza cometeu *D.A. Grave,* outro matemático soviético, ao supor que, para todo primo *p*, o número $2^{p-1} - 1$ não é divisível por p^2. O cálculo direto confirmava essa hipótese para todos os números *p menores que 1000.* Entretanto, logo se comprovou que $2^{1092} - 1$ é divisível por 1093^2 (1093 é um número primo), ou seja, a hipótese de Grave era falsa.

Como exercícios tente provar as seguintes conjecturas, via indução

Exercício 1 Provar por indução que $\mathbf{n^3 + 2n}$ é divisível por 3, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercício 2 Seja X_n a sequência definida por: $X_n:=2$, se $n=1$ e
$X_n:=X_{n-1}+2n$, se $n>1$.

Usando o Octave (ou SciLab), encontre uma equação simples, como a da série **(*)** na página 3, e a demonstre por indução. Isto é, encontrar uma fórmula para n (e.g. f(n)) e prove que $\mathbf{X_n= f(n)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exercício 3 Prove que $\mathbf{x^n-1}$ é divisível por x-1, para todo $x \in \mathbb{N}$ $(x \neq 1)$ e todo $n \in \mathbb{N}^*$ (para x=1 funcionaria se

[5] O símbolo # é utilizado para representar a **cardinalidade** de conjunto (finito), assim #{a,b}=2, #{}=0 e #{1,2,a}=3.
[6] Barão Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) filósofo e matemático alemão nascido em Leipzig foi um dos fundadores do cálculo infinitesimal, juntamente com Sir Isaac Newton (1642-1727).

usarmos a definição: a é div b <=> existe algum $n \in \mathbb{N}$, para o qual a=q.b).

Exercício 4 Estude a sequência gerada por $\mathbf{n^5-n}$. Note que ela é divisível por determinado natural, prove este resultado utilizando indução em $n \in \mathbb{N}$.

Discussões e Conclusões

Nesta apostila examinamos vários exemplos de relações indexadas pelos naturais e pudemos perceber que pacotes como o Octave ou Maple, são poderosos recursos para que possamos estabelecer padrões de comportamento ou testá-los, eventualmente encontrando contra-exemplos. Porém, se não formos capazes de encontrar um tal contra-exemplo, **não é** válido concluir que o padrão é ocorrerá sempre, mas se este for indexado pelos naturais a indução matemática poderá certificar sua validade.

Ou seja:

> Se detectamos a validade de determinada proposição (indexada pelos naturais) para vários casos particulares, o que podemos afirmar? Que a proposição é válida para os casos examinados e só!
>
> Mas podemos conjecturar que a proposição é válida para todos os naturais e como tentativa de demonstração, podemos utilizar o *método de indução matemática*.

Em resumo, o **Princípio de Indução Matemática** pode ser aplicado sempre que a tese for indexada pelos naturais da seguinte maneira: demonstre a validade das condições 1 (base) e 2 (passo) para sua particular proposição.